Proseminar

Matrizengruppen

Prof. Dr. E. Oeljeklaus

SS 2003
Universität Bremen

Spin-Gruppen

von Tanja Penner

Inhaltsverzeichnis

		Seite
A. Clifford-Algebren	.....	III
B. Pin(k) und Spin(k)	.....	VI
Literaturliste	.....	X

Die Spin-Gruppen Spin(k) sind Untergruppen der Gruppe der Einheiten in der Clifford-Algebra.

A. Clifford-Algebren

Für k = 0,1,2,... wird eine reelle Algebra C_k der Dimension 2^k definiert.
Als erstes setze man

$$C_0 = \mathbb{R}.$$

Weiterhin muss C_1 2-dimensional sein: man nehme eine Basis (1,e).
Sei 1 eine vielfache Identität und definiere $e^2 = -1$.
Man erkläre die Multiplikation

$$(a + be)(c + de) = (ac – bd) + (ad + bc)e.$$

Man sieht, dass

$$C_1 \cong \mathbb{C}$$

als 2-dimensionale reelle Algebra.

Weiter muss C_2 4-dimensional sein. Man nehme nun die Basis $(1, e_1, e_2, e_1e_2)$ und setze

$$e_1^2 = -1,\ e_2^2 = -1 \text{ und } e_1e_2 = -e_2e_1.$$

Man sieht, dass die Abbildung

$$1 \mapsto 1$$
$$e_1 \mapsto i$$
$$e_2 \mapsto j$$
$$e_1e_2 \mapsto k$$

einen Isomorphismus gibt:

$$C_2 \cong \mathbb{H}.$$

Definition: C_k ist eine Algebra, welche erzeugt ist als eine Algebra durch $(e_1, e_2, \ldots e_k)$ mit

$$e_i^2 = -1 \text{ und } e_ie_j = -e_je_i \text{ falls } i \neq j.$$

$

Um zu erklären, was mit „erzeugt als eine Algebra“ gemeint ist, erwägt man C_3.
Zu e_1, e_2, e_3 muss man 1 und die Produkte von den e_i dazu nehmen, um eine Vektorraumbasis für C_3 zu bekommen.

Dabei erhält man folgende Basis der Dimension $2^3 = 8$:

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3\}.$$

Dasselbe Argument zeigt, dass

$\{e_{i1} \dots e_{ir} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_r, 0 \le r \le k\}$ eine Vektorraumbasis für C_k ist
(r = 0 kennzeichnet das Element 1 der Basis).

Die Abbildung

$$C_{k-1} \ni e_i \mapsto e_i \in C_k$$

ist eine Unteralgebra von C_k

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_{k-1} \subset C_k \dots .$$

C_0, C_1 sind Körper, C_2 ist Schiefkörper, aber man kann dies nicht für k > 2 erwarten.

Satz I: Für alle k >2 hat C_k Nullteiler.

Beweis: Es genügt, einen Nullteiler in C_3 zu finden, d. h. ein $x \neq 0$ bedeutet, dass es ein $y \neq 0$ mit $xy = 0$ gibt.

Seien $x = 1+e_1e_2e_3$ und $y = 1- e_1e_2e_3$, so folgt:

$$\begin{aligned} xy &= (1+ e_1e_2e_3)(1- e_1e_2e_3) \\ &= 1 - e_1e_2e_3 + e_1e_2e_3 - e_1e_2e_3e_1e_2e_3 \\ &= 1 - e_1e_2(-e_1e_3)e_2e_3 \\ &= 1 - e_1e_1e_2e_3e_2e_3 \\ &= 1 - e_1e_1e_2(-e_2e_3)e_3 \\ &= 1 + e_1e_1e_2e_2e_3e_3 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist x Nullteiler.

$

Definition: Sind A und B reelle Algebren, so ist ihre ***direkte Summe*** $A \oplus B$ die Menge aller Paare (x,y) mit $x \in A$ und $y \in B$

$$A \oplus B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$$

mit Operationen

$$(x,y) + (z,w) = (x+z, y+w)$$
$$r(x,y) = (rx,ry)$$
$$(x,y)(z,w) = (xz, yw)$$

wobei $x,z \in A$, $y,w \in B$ und $r \in R$.

$

Satz II: **i)** A⊕B hat Nullteiler;
ii) Für jeden Körper F hat $M_n(F)$ Nullteiler, falls $n \geq 2$.

Beweis: i) Sei $(1,0) \in A$, $(0,1) \in B$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

=> A⊕B hat Nullteiler

ii) Sei nun $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(F)$ und $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(F)$.

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $M_n(F)$ (für $n \geq 2$) hat Nullteiler.

$

Es gibt den gleichen Weg, um zu C_4 zu kommen.

Man überlege: $C \subset H \subset H \oplus H \subset M_2(H)$, wobei $C \cong C_1$, $H \cong C_2$, $H \oplus H \cong C_3$, $M_2(H) \cong C_4$.

Als folgendes werden repräsentiert:

$a \in C$ durch $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$q \in H$ durch $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

$(q_1, q_2) \in H \oplus H$ durch $\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \text{ - > } e_1$$

$$\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \text{ - > } e_2$$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \text{ - > } e_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix} \text{ - > } e_4$$

gibt einen Isomorphismus.

B. Pin(k) und Spin(k)

Sei R^k ein k-dimensionaler Vektorraum in C_k, aufgespannt durch $e_1, e_2, \ldots, e_k$, die Orthonormalbasis bzgl. Skalarprodukt bilden, und sei S^{k-1} die Einheitssphäre in R^k.

Satz III: Wenn C_k^* die Gruppe von Einheiten in C_k ist, dann gilt $S^{k-1} \subset C_k^*$, d. h. jedes $x \in S^{k-1}$ ist eine Einheit.

Beweis: Sei $x = a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ke_k$ mit $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2 = 1$ und sei $y = (-a_1)e_1+(-a_2)e_2+\ldots+(-a_k)e_k \in S^{k-1}$.

Dann gilt:
$xy = (a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ke_k)((-a_1)e_1+(-a_2) e_2+\ldots+(-a_k)e_k) = \sum_{i\neq j}a_i(-a_j)e_ie_j + \sum_{i=j}a_i(-a_j)e_ie_j = 0 + \quad +\sum_{i=j}a_i(-a_j)e_ie_j = \sum_{i=j}a_i(-a_j)(-1) = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2 = 1,$
da $e_ie_i = -1$ für i=1, ..., k ist.

$

Definition: ***Pin(k)*** ist die Untergruppe von C_k^*, erzeugt durch S^{k-1}.

Folglich ist jedes Element von Pin(k) ein endliches Produkt von Elementen aus S^{k-1}.

Man definiere eine ***Konjugation*** in C_k. Es genügt, diese Konjugation auf Basiselementen zu definieren, und man setze:

$$(e_{i1}e_{i2}...e_{ir})^* = (-e_{ir})...(-e_{i2})(-e_{i1}) = (-1)^r e_{ir}...e_{i2}e_{i1}$$

z.B.

$$1^* = 1;$$
$$e_i^* = -e_i;$$
$$(e_ie_j)^* = (-1)^2e_je_i = -e_ie_j;$$
$$(e_ie_je_k)^* = (-1)^3e_ke_je_i = -e_ke_je_i = e_ke_ie_j = -e_ie_ke_j = e_ie_je_k$$

Klar ist, dass

$$(x^*)^* = x .$$

Also: $$(xy)^* = y^*x^*,$$

wegen

$$\begin{aligned}((e_{i1}e_{i2}...e_{ir})(e_{j1}e_{j2}...e_{js}))^* &= (e_{i1}e_{i2}...e_{ir}e_{j1}e_{j2}...e_{js})^* \\ &= (-e_{js})...(-e_{j2})(-e_{j1})(-e_{ir})...(-e_{i2})(-e_{i1}) \\ &= (e_{j1}e_{j2}...e_{js})^* (e_{i1}e_{i2}...e_{ir})^* .\end{aligned}$$

Man definiere einen Automorphismus α von C_k durch:

$$\alpha(e_i) = -e_i$$

(Konjugation ist kein Automorphismus, da die Konjugation mit α bei jedem e_i übereinstimmt, aber $\alpha(e_ie_j) = \alpha(e_i)\alpha(e_j) = (-e_i)(-e_j) = e_ie_j$, andererseits $(e_ie_j)^* = -e_ie_j$.)

Definition: Für $u \in Pin(k)$ und $x \in \mathbb{R}^k$ setzt man

$$\varphi(u)(x) = \alpha(u)xu^*.$$

Es ist nicht klar, dass $\varphi(u)(x) \in \mathbb{R}^k$, aber es ist eine Folgerung aus den folgenden 2 Sätzen.

Satz IV: Ist $u \in S^{k-1} \subset Pin(k)$, so ist $\varphi(u)$ Spiegelung in $\mathbb{R}^k$ an Hyperebene, rechtwinklich zu u.

Beweis: Man nehme eine Orthonormalbasis $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ aus $\mathbb{R}^k$ mit $u_1 = u$.
(Durch Lineartransformation von Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ bekommt man neue Orthonormalbasis $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$).

Man überlege: $\varphi(u_1)(u_i) = \alpha(u_1)u_iu_1^* = (-u_1)u_i(-u_1) = u_1u_iu_1$.

Und es folgt: für i=1: $\varphi(u_1)(u_1) = \alpha(u_1)u_1u_1^* = (-u_1)u_1(-u_1) = -u_1$
für $i \neq 1$: $\varphi(u_1)(u_i) = \alpha(u_1)u_iu_1^* = (-u_1)u_i(-u_1) = u_1u_iu_1 = -u_iu_1u_1 = u_i$.

$

Satz V: φ ist ein surjektiver Homomorphismus von Pin(k) in O(k) und $\ker \varphi = \{1, -1\}$.

Beweis: Jedes Element von Pin(k) ist ein endliches Produkt von Elementen aus S^{k-1}.
Um zu beweisen, dass φ ein Homomorphismus ist, reicht es $u,v \in S^{k-1}$ und $x \in \mathbb{R}^k$ zu nehmen.

Dann gilt:
$\varphi(uv)(x) = \alpha(uv)x(uv)^* = \alpha(u)(\alpha(v)xv^*)u^* = \varphi(u)(\varphi(v)x) = \varphi(u)\varphi(v)(x)$.

Es folgt nun, dass für jedes $u \in Pin(k)$ $\varphi(u)$ „bildet $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^k$ ab“ und es ist orthogonal, da es ein Produkt einer Spiegelung ist.
Im Kapitel VIII (Satz 12-13) wurde gezeigt, dass O(k) durch Spiegelungen erzeugt wurde, s. d. φ surjektiv ist.
Es ist klar, dass 1 und -1 im Kern von φ sind, da gilt:

$\varphi(1)(x) = \alpha(1)x1^* = \alpha(1)x1 = 1x1 = x$
$\varphi(-1)(x) = \alpha(-1)x(-1)^* = \alpha(e_1e_1)x(e_1e_1)^* = \alpha(e_1)\alpha(e_1)xe_1^*e_1^*$
$= (-e_1)(-e_1)x(-e_1)(-e_1) = (-1)x(-1) = x$

Wenn man $e_{i1}e_{i2}\dots e_{ir}$ aus dem Kern von φ mit $r > 1$ nimmt ($r = 1$ kann nicht

vorkommen, da nach Satz 4 φ eine Spiegelung und Determinante von φ gleich –1 wäre, also wäre φ für r = 1 keine Identität sein können),
erhält man einen Widerspruch wiefolgt:

Damit $\varphi(e_{i1}e_{i2}...e_{ir})$ Identität ist, soll gelten:
Für jedes $x \in \mathbb{R}^k$ $\varphi(e_{i1}e_{i2}...e_{ir})(x) = x$.

Man überlege: $$\varphi(e_{i1}e_{i2}...e_{ir})(x) = x$$
$$\alpha(e_{i1}e_{i2}...e_{ir})x(e_{i1}e_{i2}...e_{ir})^* = x$$

(r soll gerade sein, da $\varphi(e_{i1}e_{i2}...e_{ir}) = \varphi(e_{i1})\varphi(e_{i2}) ... \varphi(e_{ir})$, wobei das Produkt einer ungeraden Zahl der Spiegelungen keine Identität sein kann)

Man multipliziere die beiden Seiten von rechts mit $e_{i1}e_{i2}...e_{ir}$,
wobei $e_{i1}e_{i2}...e_{ir} = ((e_{i1}e_{i2}...e_{ir})^*)^*$ und r gerade ist:

$$(-1)^r e_{i1}e_{i2}...e_{ir}x(-1)^r e_{ir}...e_{i2}e_{i1}e_{i1}e_{i2}...e_{ir} = xe_{i1}e_{i2}...e_{ir}$$
$$(-1)^r e_{i1}e_{i2}...e_{ir}x(-1)^r(-1)^r = xe_{i1}e_{i2}...e_{ir}$$
$$e_{i1}e_{i2}...e_{ir}x = xe_{i1}e_{i2}...e_{ir}.$$

Sei $x = e_{i1}$, dann folgt

$$e_{i1}e_{i2}...e_{ir}e_{i1} = e_{i1}e_{i1}e_{i2}...e_{ir}$$
$$(-1)^{r-1} e_{i1}e_{i1}e_{i2}...e_{ir} = - e_{i2}...e_{ir}$$
$$(-1)^r e_{i2}...e_{ir} = - e_{i2}...e_{ir}$$
$$e_{i2}...e_{ir} = - e_{i2}...e_{ir}$$
$$e_{i2}...e_{ir} + e_{i2}...e_{ir} = 0$$
$$2\, e_{i2}...e_{ir} = 0$$
$$e_{i2}...e_{ir} = 0.$$

Man kommt also zum Widerspruch, da e_{ij} Einheiten sind.
Also ker φ = {1, -1}.

$

Definition: $\mathrm{Spin}(k) = \varphi^{-1}[SO(k)] = \{x \in \mathrm{Pin}(k) \mid \varphi(x) \in SO(k)\}$.

Man rechne nun Spin(1), Spin(2), Spin(3) aus.

$C_1 = \mathbb{C}$, so $C_1^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und Pin(1) ist eine Untergruppe von C_1^*, erzeugt von $S^0 = \{e_1, -e_1\}$.
$$\mathrm{Pin}(1) = \langle e_1 \rangle = \{e_1, e_1^2 = -1, e_1^3 = -e_1, e_1^4 = 1\} \cong \mathbb{Z}_4$$
Dann:
$$\mathrm{Spin}(1) = \{a \cdot 1 \mid a^2 = 1\} = \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

$C_2 = \mathbb{H}$, so $C_2^* = \mathbb{H}\setminus\{0\}$ und Pin(2) ist eine Untergruppe von C_2^*,
erzeugt von $S^1 = \{ae_1 + be_2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$.

Seien ae_1+be_2, $ce_1+de_2 \in S^1$.

Nun $(ae_1+be_2)(ce_1+de_2) = -(ac + bd) + (ad – bc)e_1e_2$,
s.d. Pin(2) $S = \{c + de_1e_2 \mid c^2 + d^2 = 1\}$ beinhalten muss.

Also gilt :

$$\text{Pin}(2) = S \cup S^1 \text{ und}$$
$$\text{Spin}(2) = S = \{c + de_1e_2 \mid c^2 + d^2 = 1\}.$$

Analog dazu

$$\text{Spin}(3) = \{a + be_1e_2 + ce_1e_3 + de_2e_3 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

Und man sieht

$$\text{Spin}(3) \cong \text{Sp}(1).$$

Dieser Teil wird mit einer Berechnung des Zentrums der Spin-Gruppen abgeschlossen.

Zuerst hat man immer {1, -1} im Zentrum.
Spin(1), sowie Spin(2) ist äquivalent ihrem Zentrum
(seien $c + de_1e_2$, $x + ye_1e_2 \in$ Spin(2), $(c + de_1e_2)(x + ye_1e_2) = cx + cye_1e_2 + dxe_1e_2 + dye_1e_2e_1e_2 = (x + ye_1e_2)(c + de_1e_2)$).

Also sei $k \geq 3$.
Man stelle sich vor, $e_{i1}e_{i2}...e_{ir}$ scheitert e_j zu beinhalten. Man nehme ein Element $e_{ir}e_j$ und überlege
$(e_{i1}e_{i2}...e_{ir})(e_{ir}e_j) = (-1)^{r-1}e_{ir}(e_{i1}e_{i2}...e_{ir})e_j = (-1)^{r-1}(-1)^r(e_{ir}e_j)(e_{i1}e_{i2}...e_{ir}) = -(e_{ir}e_j)(e_{i1}e_{i2}...e_{ir})$
beweisend, dass $e_{i1}e_{i2}...e_{ir}$ nicht im Zentrum ist.
Also sind $e_1e_2...e_k$ und $-e_1e_2...e_k$ die einzigen Kandidaten (neben 1und -1).

Nun für k ungerade: $e_1e_2...e_k$ liegt nicht in Spin(k) (nach Konstruktion von Spin(k)).
Für $k = 2n$ sehen wir, dass

$$(e_1e_2...e_{2n})(e_{i1}e_{i2}...e_{ir}) = (-1)^{r(2n)}(e_{i1}e_{i2}...e_{ir})(e_1e_2...e_{2n}) = (e_{i1}e_{i2}...e_{ir})(e_1e_2...e_{2n})$$

s.d. $e_1e_2...e_{2n}$ im Zentrum ist (analog für $-e_1e_2...e_{2n}$).

<u>Satz VI</u>: (i) Ist k ungerade, so gilt: Zentrum Spin(k) = {1, -1}.

(ii) Zentrum Spin(2n) = Z_4, falls n ungerade ist.

(iii) Zentrum Spin(2n) = $Z_2 \oplus Z_2$, falls n gerade ist.

Beweis: (i) ist schon bewiesen (siehe oben) und man hat gesehen, dass

$$\text{Zentrum Spin}(2n) = \{1, -1, e_1e_2...e_{2n}, -e_1e_2...e_{2n}\}$$

Notiere,dass

$$(e_1e_2...e_{2n})(e_1e_2...e_{2n}) = (-1)^{2n-1}(-1)^{2n-2}\ldots(-1)^{2n-(2n-1)}\, e_1e_1e_2e_2\ldots e_{2n}e_{2n}$$
$$= (-1)^{2n}(-1)^{2n-1}(-1)^{2n-2}\ldots(-1)^{2n-(2n-1)} = (-1)^{n(2n+1)}.$$

$(e_1e_2...e_{2n})(e_1e_2...e_{2n}) = (-1)^{n(2n+1)} = 1$, falls n gerade
$(e_1e_2...e_{2n})(e_1e_2...e_{2n}) = (-1)^{n(2n+1)} = -1$, falls n ungerade

Damit ist der Satz bewiesen.

$

Literaturliste

Morton L. Curtis: Matrix Groups, Springer-Verlag New York, 1979