# SO(3) und Sp(1)

## A. Der Homomorphismus $\rho : S^3 \rightarrow SO(3)$

Wir haben gesehen das Sp(1), die Gruppe aller Quaternionen der Einheitslänge, also die Einheits-3-Sphere im $IR^4$ (=IH) ist. Wir haben auch gesehen, dass dim SO(3) = $\frac{3*2}{2} = 3$.
Also haben $S^3$ und SO(3) dieselbe Dimension und wir wissen, dass sie isomorph sein könnten. In diesem Abschnitt werden wir einen beinahe Isomorphismus definieren und untersuchen.

Satz 1: Wenn $q \in S^3$, dann ist die „links Translation“

$$L_q : H \rightarrow H$$

gegeben durch $L_q(q') = qq'$ eine orthogonale Abbildung des $IR^4$ in den $IR^4$.

Beweis: Als Vektorraum über IR, IH und $IR^4$ sind dieselben, also ist $L_q$ eine lineare Abbildung des $R^4$. Für $a,b \in R$ und $\alpha,\beta \in H$ haben wir

$L_q(\alpha a + \beta b) = q(\alpha a + \beta b) = aq\alpha + bq\beta = aL_q(\alpha) + bL_q(\beta)$.

Um zu sehen das $L_q$ orthogonal ist, reicht es zu zeigen, dass $L_q$ die Orthogonalität für die vier Einheitsvektoren l, i, j, k erhält. (mit dem <,> Skalarprodukt des $R^4$)

Zum Beispiel, sei q = a + ib+ jc + kd, berechne $<L_q(i), L_q(j)>$.
$<ai – b – kc + jd, aj + kb – c – id> = -ad + cb – cb + ad = 0$
Für $<L_q(l), L_q(i)>$ bekommen wir
$<a + ib + jc + kd, ai – b – kc + jd> = -ab + ab + dc – dc = 0$.
Die Berechnung der anderen Paare der Basisvektoren ist ähnlich.

Definition von ρ: Für $q \in S^3$ und $\alpha \in H$ definieren wir

$$\rho(q)(\alpha) = q\alpha\bar{q}.$$

Wir machen eine links Translation mit q und eine rechts Translation mit $\bar{q}$. Nach Satz 1 ist dies eine orthogonale Abbildung des $R^4$ in den $R^4$.

Reelle Quaternionen kommutieren mit allen anderen Quaternionen, sei nun x ein reelles Quaternion, dann ist:

$$\rho(q)x = qx\bar{q} = xq\bar{q} = x .$$

Also ist $\rho(\bar{q})$ das Inverse von ρ(q) in der Gruppe σ(4), da $\rho(q)\,\rho(\bar{q})(\alpha) = q(\bar{q}\alpha q)\bar{q} = \alpha$ und ebenso für $\rho(\bar{q})\rho(q)$. Zusammen implizieren diese beiden Beobachtungen, dass ρ(q) den 3-dimensionalen Raum aufgespannt von i, j und k auf sich selber abbildet.
Also kann ρ(q) als Element von o(3) angesehn werden.

Fakt: (wird nach Kapitel 6 bewiesen) $\rho(q)$ ist in SO(3).

Satz 2: $\rho : S^3 \to SO(3)$ ist ein surjektiver Homomorphismus und

$$\mathrm{Ker}(\rho) = \{1,-1\} \subset S^3 .$$

Beweis: Wenn $q_1, q_2 \in S^3$ und $\alpha \in$ Span (i, j, k) dann ist

$$\rho(q_1q_2)(\alpha) = q_1q_2\alpha\overline{q_1q_2} = q_1q_2\alpha\overline{q_2}\,\overline{q_1} = q_1(q_2\alpha\overline{q_2})\overline{q_1} = \rho(q_1)\,\rho(q_2)(\alpha)$$

also ist $\rho$ ein Homomorphismus.

Klar ist das $\rho(1)$ und $\rho(-1)$ die Identitäten im SO(3) sind, also sind 1 und -1 im Ker($\rho$).
Umgekehrt nehmen wir an, dass $\rho(q)$ die Identität ist mit $q = a + ib + jc + kd$.
Dann gibt $\rho(q)(i) = i$ :
$(a + ib + jc + kd)(i)(a – ib – jc – kd) = (a + ib + jc + kd)(ai + b – kc + jd)$
$= ia^2 + ab – kac + jad – ab + ib^2 + jbc + kbd – kac + jcb – ic^2 – cd + jad + kbd + dc – id^2$
$= i(a^2 + b^2 – c^2 – d^2) = i$
$\Rightarrow a^2 + b^2 – c^2 – d^2 = 1.$
Aber $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ und daraus schliessen wir $c = 0 = d$.
Von $\rho(q)(j) = j$ bekommen wir:
$(a + ib)(j)(a – ib) = (a + ib)(ja + kb) = ja^2 + kab + iab – jb^2$
$= j(a^2 – b^2) = j$
$\Rightarrow a^2 – b^2 = 1$
Aber $a^2 + b^2 = 1$, also ist $b = 0$.
Dann ist $a^2 = 1$, also $a \in \{1, -1\}$.

Schließlich müssen wir zeigen, das $\rho$ surjektiv ist. Dies wäre sehr einfach wenn wir ein wenig Topologie kennen würden, aber ansonsten ist es eine fast hoffnungslos komplizierte Rechnung. Hier werden nur zeigen, dass wir ein $q \in S^3$ finden können so das $\rho(q)$ein Element von SO(3) ist, welches k fest lässt, i nach j sendet und j nach -i.
Sei $q = a + ib + jc + kd$. Wir wollen das

$$(a + ib + jc + kd)(k)(a – ib – jc – kd) = k, \text{ oder}$$
$$(a + ib + jc + kd)(ka – jb + ic + d) = k, \text{ das gibt}$$
$$ka^2 – jab + iac + ad – jab – kb^2 – bc + ibd + ica + cb – kc^2 + jcd – ad + idb + jdc + kd^2 = k$$

aufgeteilt nach l, i, j und k gibt das:

l: $ad – bc + bc – ad = 0$ (automatisch),
i: $ac + bd + ac + bc = 0$ oder $2(ac + bd) = 0$.
J: $-ab + cd + dc – ab$ oder $2(cd – ab) = 0$.
k: $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 1$.

Da

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

ist

$$2(b^2 + c^2) = 0 \text{ oder } b = 0 = c.$$

Also ist die einzige Bedingung an $\rho$ damit $\rho(q)k = k$ ist, $q = a + dk$ (mit $a^2 + d^2 = 1$).
Als nächstes wollen wir, dass $\rho(q)i = j$.

$$(a + kd)(i)(a – kd) = j$$

$$(a + kd)(ia + jd) = j$$
$$i(a^2 - d^2) + j(ad + ad) = j$$
$$a^2 - d^2 = 0,\ a = \pm d$$
$$ad + ad = 1, \text{ wenn } a = d,\ 2a^2 = 1,\ a = -d \text{ ist nicht möglich.}$$

Schließlich wollen wir noch $\rho(q)j = -i$ haben.

$$(a + ka)(j)(a - ka) = -i$$
$$(a + ka)(ja - ia) = -i$$
$$ja^2 - ia^2 - ia^2 - ja^2 = -i$$
$$-2a^2 = -1$$
$$a^2 = \frac{1}{2}$$

Also ist $q = \frac{1}{\sqrt{2}} + k\frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $q = -\frac{1}{\sqrt{2}} - k\frac{1}{\sqrt{2}}$. Beides liefert uns das geforderte Element von SO(3).
Dies beweist nicht das $S^3$ und SO(3) nicht isomorph sind. ρ ist kein Isomorphismus, aber es könnte einer existieren. In dem nächsten Abschnitt werden wir ziemlich einfach beweisen, dass $S^3 \ncong SO(3)$.

# B. Zentren

In Aufgabe 4 von Kapitel 1 wurde das Zentrum C von einer Gruppe G definiert als

$$C = \{x \in G \mid xy = yx \ \forall\, y \in G\},$$

und es wurde gezeigt, dass es eine abelische und normale Untergruppe von G ist.

Beh: Jeder Isomorphismus einer Gruppe induziert einen Isomorphismus ihrer Zentren.

Beweis: Seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Isomorphismus. Dann ex $\varphi^{-1}$ und $\varphi^{-1} : H \to G$ ist ein Homomorphismus. Sei $C_g$ das Zentrum von G, $C_h$ das Zentrum von H und $g \in C_g$. Zu zeigen ist nun $\varphi(g) \in C_h$.
Sei nun $h \in H$ beliebig und $\tilde{g} = \varphi^{-1}(h) \in G$.
Es gilt $g\tilde{g} = \tilde{g}g$ da $g \in C_g$
$\Rightarrow \varphi(g)*\varphi(\tilde{g}) = \varphi(g\tilde{g}) = \varphi(\tilde{g}g) = \varphi(\tilde{g}) * \varphi(g)$
$\varphi(\tilde{g}) = h$,
$\Rightarrow \varphi(g)*h = h* \varphi(g),\ \forall\, h \in H$
$\Rightarrow \varphi(g) \in C_h$

Wir werden zeigen, dass $S^3 \ncong SO(3)$ indem wir zeigen das ihre Zentren nicht isomorph sind.

Satz 3: Das Zentrum von $S^3 = Sp(1)$ ist $\{1, -1\}$, während das Zentrum von SO(3) $\{I\}$ ist.

Beweis: Da reelle Quaternionen mit allen anderen Quaternionen kommutieren ist klar, dass $\{1, -1\} \subset$ Zentrum $S^3$.
Nehmen wir jetzt an, dass $q = a + ib + jc + kd$ im Zentrum liegt. Dann gibt uns $qi = iq$

$$ai - b - ck + dj = ai - b + ck - dj$$

also ist c = 0 = d. Dann gibt uns qj = jq

$$(a + ib)j = j(a + ib)$$
$$ja + kb = ja - kb$$

und das impliziert b = 0. Also ist q = a und $a^2 = 1$. Also ist das Zentrum von $S^3 = \{1, -1\}$. Angenommen $A \in SO(3)$ liegt im Zentrum. Da A mit all anderen Elementen von SO(3) kommutiert, kommutiert es auch mit allen Elementen von

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da $T \subset SO(3)$ (Aufgabe 1 Kapitel 3)
Beachte die Standard Basis des $IR^3$ $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Behauptung: A lässt $e_3$ fest (oder sendet es zu $-e_3$). $Ae_3 = e_3/-e_3$
Wähle $B \in T$ welche $e_1$ nach $e_2$ und $e_2$ nach $-e_1$ sendet und (automatisch) $e_3$ fest lässt.
Dazu sei $\theta = \frac{3\pi}{2}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann sei $Ae_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$. Dann $BAe_3 = ae_2 - be_1 + ce_3$, und $ABe_3 = Ae_3$; das impliziert a = 0 = b und da A die Länge erhält, müssen wir haben c = 1, oder c = -1.

Also induziert A eine orthogonale Abbildung der $e_1e_2$-Ebene. Es ist sogar eine Drehung weil:

Lemma: Jedes Element von o(2) was mit jeder Drehung kommutiert ist selber eine Drehung.

Beweis: Sei $\varphi : IR^2 \to IR^2$ ein solches Element. Für jede Drehung

$$t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

müssen wir haben $\varphi t = t\varphi$. Sei $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Wir bekommen

$$\alpha \cos\theta - \beta \sin\theta = \alpha \cos\theta + \gamma \sin\theta$$
$$\alpha \sin\theta + \beta \cos\theta = \beta \cos\theta + \delta \sin\theta$$
$$\gamma \cos\theta - \delta \sin\theta = -\alpha \sin\theta + \gamma \cos\theta$$
$$\gamma \sin\theta + \delta \cos\theta = -\beta \sin\theta + \delta \cos\theta,$$

für alle $\theta$. Also $\gamma = -\beta$ und $\alpha = \delta$. Daraus folgt

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ und } \det \varphi = \alpha^2 + \beta^2.$$

Da dies aber nicht gleich -1 sein kann (aber in {1, -1}), beweisst dies das Lemma.

Dies zeigt auch, dass c = 1 (und nicht -1, da A∈ SO(3)) und wir schliessen daraus A∈ T.
Nun können wir den Beweis beenden.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und sei

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Da A mit R kommutieren muss, bekommen wir

$$AR = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = RA.$$

Also müssen wir haben, dass cosθ = 1 und sinθ = 0. Damit ist A = I und Satz 3 ist bewiesen.

Wer werden die Zentren der Gruppen SO(n), U(n), SU(n) und Sp(n) in einem späteren Kapitel berechnen, nachdem wir maximale Tori kennen gelernt haben. Wie beenden das Kapitel mit ein bisschen abstrakter Theorie, die wir später noch brauchen werden.

## C. Quotienten Gruppen

Wenn H eine Untergruppe von G ist, definieren eine Äquivalenz Relation ~ auf G mit

$$x \sim y \text{ wenn } xy^{-1} \in H.$$

Diese Relation ist reflexiv, $x \sim x$, da $xx^{-1} = e \in H$.
Sie ist symmetrisch, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, da $xy^{-1} \in H \Rightarrow (xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$.
Sie ist transitiv, $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$, da $xy^{-1} \in H$ und $yz^{-1} \in H$ implizieren, dass $(xy^{-1})(yz^{-1}) = xz^{-1} \in H$.
Somit teilt ~ G in Äquivalenz Klassen.

Bezeichnen wir mit C(x) die Klasse bezüglich x. Dann

$$C(x) = Hx = \{hx \mid h \in H\}.$$

Also $Hx = Hy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \Leftrightarrow y \in C(x) \Leftrightarrow x \in C(y)$. Diese Äquivalenz Klassen werden rechte Nebenklasse von H genannt.

Beispiel: Sei $G = S^3$ ( = Sp(1) ) und $H = \{1, -1\}$. Dann $Hq = \{q, -q\} = H(-q)$, jede Äquivalenz Klasse beinhaltet also genau zwei Punkte des $S^3$.

Man definiert die linken Nebenklassen in ähnlicher Art und Weise:

$$xH = \{xh \mid h \in H\}.$$

Recall(Aufgabe 3, Kapitel 1): Eine Untergruppe H ist normal wenn $xHx^{-1} = H$ für alle x in G.

Beobachtung: Eine Untergruppe H von G ist normal (in G) $\Leftrightarrow$ $xH = Hx$ für jedes $x \in G$.

Bezeichnen wir mit G/H die Menge der Elemente, die die rechte Nebenklasse von H in G sind.

Satz 4: Wenn H eine normale Untergruppe von G ist, macht die Operation, definiert mit

$$(Hx)(Hy) = H(xy)$$

aus G/H eine Gruppe.

Beweis: Wir brauchen das H eine normale Untergruppe ist umzuzeigen, dass die Operation auf G/H wohl definiert ist. Nehmen wir an, dass $Hx = Hz$ und $Hy = Hw$ mit $x, y, z, w \in G$. Wir müssen nun zeigen, dass $H(xy) = H(zw)$

$Hx = Hz \Rightarrow x \in Hz \Rightarrow x = h_1 z$ für ein $h_1 \in H$
$Hy = Hw \Rightarrow y \in Hw \Rightarrow y = h_2 w$ für ein $h_2 \in H$
$\Rightarrow xy = h_1 z h_2 w$
$Hz = zH \ \forall z \in G$ da H normale Untergruppe
$\Rightarrow zh_2 \in zH = Hz$
$\Rightarrow zh_2 = h_3 z$ für ein $h_3 \in H$.
$xy = h_1 h_3 zw$
$H(xy) = H(h_1 h_3)zw = H(zw)$

damit haben wir gezeigt, dass die Operation wohldefiniert ist.
Der Rest ist einfach. $H = He \in G/H$ ist die Identität
$HeHx = Hex = Hx = Hxe = HxHe$,
und $Hx^{-1}$ ist das Inverse von Hx
$HxHx^{-1} = Hxx^{-1} = He$.
Die Assoziativität ist vererbt von G.
$(HxHy)Hz = H(xy)Hz = H(xy)z = Hx(yz) = HxH(xy) = Hx(HyHz)$. ( $(xy)z = x(yz)$ in G)

Beispiel: G = Sp(1) und $H = \{1, -1\}$. H ist das Zentrum von G und ist deshalb eine normale Untergruppe. Also ist G/H eine Gruppe. Wir kennen sie, es ist SO(3).

Es gibt eine natürliche Abbildung $\eta: G \to G/H$ gegeben durch $\eta(x) = Hx$. In den Aufgaben wird gezeigt, dass $\eta$ ein surjektiver Homomorphismus ist mit Kern H.

Sei G eine Gruppe und x, y $\in$ G. Dann wird das Element

$$xyx^{-1}y^{-1}$$

der Kommutator von x und y genannt (weil $xyx^{-1}y^{-1})(yx) = xy$).
Das Produkt von zwei Kommutatoren muss nicht notwendigerweise ein Kommutator sein, wir setzen jetzt [G, G] = {alle finite Produkte von Kommutatoren}

Satz 5: [G, G] ist eine normale Untergruppe von G und G/[G, G] ist eine abelsche Gruppe.

Beweis: Die Geschlossenheit und Identität sind klar und

$$(xyx^{-1}y^{-1})(yxy^{-1}x^{-1}) = e,$$

zeigt, dass [G, G] eine Untergruppe ist. Sei z $\in$ G und $xyx^{-1}y^{-1} \in$ [G, G].

Dann

$$z(xyx^{-1}y^{-1})z^{-1} = zxy(z^{-1}(xy)^{-1}(xy)z)x^{-1}((yz)^{-1}(yz))y^{-1}z^{-1} =$$
$$\{z(xy)z^{-1})(xy)^{-1}\}\{x(yz)x^{-1}(yz)^{-1}\}\{yzy^{-1}z^{-1}\} \in [G, G].$$

Dies ausgeweitet zu Produkten von Kommutatoren gibt, dass [G, G] eine normale Untergruppe ist.
Schließlich, [G, G]x[G, G]y = [G, G]xy = [G, G]yx = [G, G]y[G, G]x da
$xy(yx)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} \in$ [G, G].

In den meisten Fällen werden wir feststellen, dass wenn G eine Matrix Gruppe ist und C ihr Zentrum, dann hat G/C ein trivales Zentrum, aber das muss nicht immer sein.